

第二年期中考報告

壹、序論

在確定提撥制下，員工雖然必須承擔投資風險，但因此也有機會得到較高的投資報酬率，再加上稅賦遞延的效果，員工可以利用相同的提撥成本得到更優厚的退休金以增加其退休財源的適足性。對於員工而言提撥的退休基金的運用影響了員工未來退休後的權益。因此適當的退休金提撥率以及適當的資產配置方法對於退休基金而言是非常關鍵的因素。又有鑑於台灣目前即將改制的確定提撥制下，退休時所能領到的退休金額是不確定的。因此本研究希望能在確定提撥制下，給定一預估的目標，在考量風險與報酬的情況下，使得退休基金期末資產的累積能達到此預估目標，甚至能超過預定目標。

第一年之方法的優點是較容易執行，而且也較易於在實務上採用，但其缺點是此方法較適用於單期(single-period)投資策略，也就是投資者不論期間多長，每年的最佳資產配置都不變，這也許不大適用於退休基金等如此長時間之投資，如果要真正找出複雜的多期(multi-period)投資策略，則必須借助於演化策略(evolution strategy)等演算法。因此第二年之計畫之目的是採用各個投資標未來報酬率的模擬值，直接採用基因演算法，根據投資者之各別的風險和報酬的偏好，求出其多期最佳資產配置，因為我們本研究使用隨機模擬來模擬各種可能的情境，因此模擬次數的多寡對於結果的準確性有很大的影響，越多的模擬次數越可以表現未來可能發生的情境，但是越多的模擬次數也相對的越增加我們模擬分析所需花費的時間。Yvonne (2002、2003)藉由情境抽樣(Scenario Sampling)將模擬次數減少，並將其抽樣與原本模型的結果做比較，證明其提出之情境抽樣方法是有效的。而本文在增進模擬效率的部分乃是藉由改進其方法，使我們所需的模擬次數可以適當的減少，而大幅的減少我們每次最適化所需花費的時間。市場上有許多投資策略，基本上可以區分為兩類：第一類靜態投資策略；第二類動態投資策略，只需決定出使投資組合的各部位權重，動態投資策略則依照投資人的策略及風險偏好程度，在每一時期會對資產配置做重新規劃。Plaxco & Arnott(2002)也指出，能夠隨時間調整的投資策略比買進持有的投資策略更能有效地做風險控管以及提高獲利。因此在針對退休基金等長達40年時期的資產負債管理時，投資策略的選擇影響是非常嚴重的。Blake、Cairns and Dowd(2001)比較在不同投資策略以及投資模型，達到目標退休給付的差異。結果顯示，不同投資策略對於成功機率的影響非常顯著；而投資模型的影響並不大。本計劃針對DC 退休金制度下，使用基因演算法，探討在投資策略不同對於退休年紀的影響，本研究以投資者所設定的退休年齡範圍為目標函數，在可容忍風險下求出其最適投資組合來符合投資者的目標。並針對不同投資策略設計下，探討

其在靜態資產配置以及動態資產配置中投資績效的差異。

貳、情境抽樣法

採用基因演算法雖然可以找到真正多期最佳資產配置，但當採用之未來報酬率的模擬值的組數太多時，則可能會有所得到之最佳解落入區域最佳解的情形，因此，第二年之計畫首先會使用均勻抽樣法或指標抽樣法抽出較具代表性之未來各投資標的報酬率的模擬值，然後根據此選取出來之具代表性的報酬率模擬值，採用基因演算法求出其最適之多期資產配置。

一、均勻抽樣法

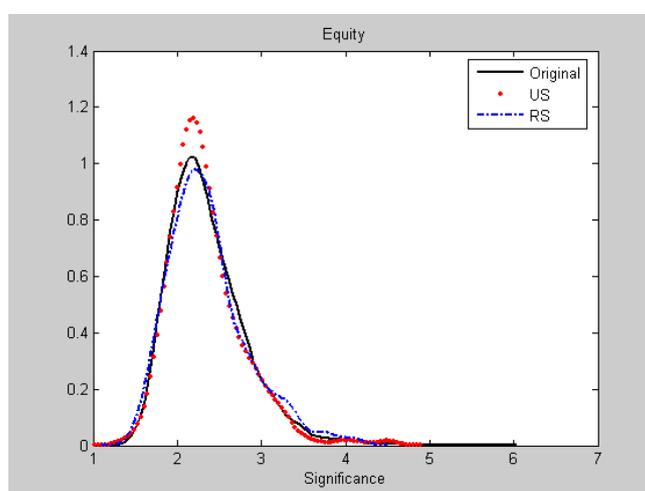
均勻抽樣法(Uniform Sampling Method)的目的是希望能利用較少的情境數來表達所有模擬情境數的特性，因此可以看成是縮小的母體。Yvonne C. (2002、2003)的均勻抽樣法，是把 m 組 n 年內的利率 i 藉由一顯著測度(Significance Measure)的大小對 i 的各種情境做一排序(Sort)，將排序好的 m 種情境以分組後取中間值的方式做抽樣。舉例來說：如果要從 4000 組模擬的情境中抽出 400 組情境，首先我們先將排序好的情境分成 400 組每組 10 個，再將每組最中間的那個情境挑選出來，也就是排序後的第 5、15、...、3995 個情境。以這樣抽出來的 400 組情境便可以代替原先的 4000 組情境。以下為其定義測度大小之公式：

$$\text{顯著測度} = \sqrt{\sum_{t=1}^n \left\{ \frac{1}{\prod_{k=1}^t [1+i(k)]} \right\}^2} \quad (10)$$

Yvonne C. (2002、2003)只有對單一種利率的情境做抽樣。首先假設本文模擬了 m 組的情境，因為每組模擬的情境中分別有四種資產名目報酬率 (r_1 、 r_2 、 r_3 、 r_4)，我們的目標是希望找到能代表這 m 組情境的抽樣，因此抽樣時應該得考慮四種資產名目報酬率各自的顯著測度，但是因為各自的顯著測度並沒有標準化，所以可能會被某幾種或者單一情境因子所影響最後的結果。因此參考其顯著測度的計算方式，其中 σ_{r_1} 、 σ_{r_2} 、 σ_{r_3} 、 σ_{r_4} 等代表的是分別的顯著測度的標準差，我們將各自的測度做標準化並將測度公式定義如下：

$$\text{顯著測度} = \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^n \left\{ \frac{1}{\prod_{k=1}^t [1+r_1(k)]} \right\}^2}}{\sigma_{r_1}} + \dots + \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^n \left\{ \frac{1}{\prod_{k=1}^t [1+r_4(k)]} \right\}^2}}{\sigma_{r_4}} \quad (11)$$

為了與均勻抽樣法有一比較的對象，我們使用了抽樣中最基本的隨機抽樣方法(Random Sampling Method)，從 4000 組的模擬情境中隨機的抽取其中的 400 組，並將兩種抽樣法與原先未抽樣的結果作一比較。從(圖一)我們可以看出兩種抽樣法與未抽樣之機率分配都有很高的相似度。



圖一：均勻抽樣(US)與隨機抽樣法(RS)與未抽樣之股票顯著測度機率分配圖

二、指標抽樣法

指標抽樣法(Pivot Sampling Method)的目的除了減少模擬的情境數外，更重要的是希望能找到母體中比較極端的情況。因為我們最在意的並不是一般的情況，而是當總體經濟環境非常糟糕時對我們投資上的影響，亦即是對母體的尾端分配作分析。本文的指標抽樣法是以 Yvonne C. (2002、2003)的指標抽樣法精神所做修改，均勻抽樣法是將顯著測度排序後以排序的順序作抽樣；我們修改後的指標抽樣法是以顯著測度的數值為標準，從最大值到最小值等分為數個區間，以區間內離顯著測度平均值最遠的值为該區間的指標，而該區域內所包含的情境數則代表了該指標的機率。以 4000 組情境抽樣為例，我們先將顯著測度從最大值到最小值等分為 400 個區間，再將所有情境的顯著測度都分配到各個區間之中，以各個區間中的顯著測度與顯著測度平均值最遠的值为該區間的指標。以各個區間內所有的顯著測度個數為該區間指標的機率。

我們對 4000 組模擬的情境中分別做均勻抽樣與指標抽樣後，我們希望能比較兩種抽樣法的不同。從(圖 二) 是兩種情境抽樣法與抽樣前之股票顯著測度機率分配圖，我們發現使用均勻抽樣法的股票的顯著測度機率分配與未抽樣前股票的顯著測度機率分配幾乎是一模一樣的；而使用指標抽樣法的顯著測度機率分配與未抽樣前股票的顯著測度機率分配便有些許差異。

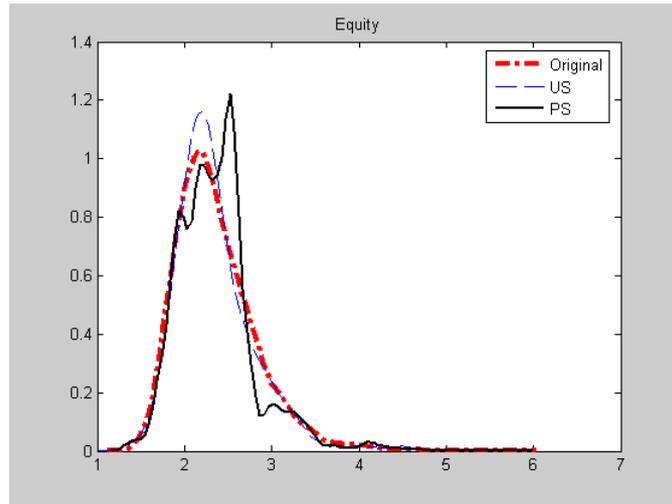


圖 二：均勻抽樣(US)與指標抽樣法(PS)與未抽樣之股票顯著測度機率分配圖

以下簡單說明兩種方法的優缺點，均勻抽樣法最大的優點便是容易使用，且抽樣後的機率分配與原先所有情境的機率分配有很高的相似度，此方法也已經被 AAA RBC C3-II 所採用，但是其缺點便是可能沒有辦法完全表現最極端的情境；指標抽樣法最大的優點便是對於尾端的機率分配有較強的表現能力，也比較能藉由抽樣的方法將最極端的情況抽出來，且因為對於尾端分配有較佳的表現能力，在估計參數時是較好的選擇(RBC C3-II 要求 CTE_{90})，但是其缺點便是抽樣的方法不容易使用。

二、數值結果

本文對各投資標的模擬 1000 次，起始工作年齡 20 歲情況下作數值分析。本節主要在研究在提撥率 6%，薪資成長率 3% 底下不同投資比重策略之下，靜態資產配置對於資產 (F_T) 累積達到三分之二所得替代率可能退休年齡 (Age) 之探討。對於退休所需，本文假設購買躉繳年金保險 (L_T)，預定利率假設 2.5%。以數學式表示即：

$$F_t = (F_{t-1} + c_t s_t) \left[\sum_{j=1}^2 P_{ij} \times (1 + r_j(t)) \right]$$

$$L_t = R s_t \ddot{a}_t$$

$$Age = \min(t : F_t > L_t \mid t \geq 20), \quad 20 \leq t \leq 110$$

本研究所模擬之投資標的其報酬率統計以及退休年齡分布圖結果如下：

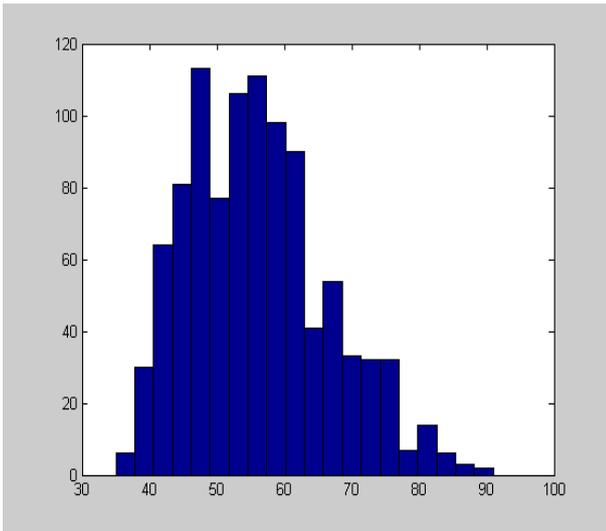


圖 3A Regular Rebalance

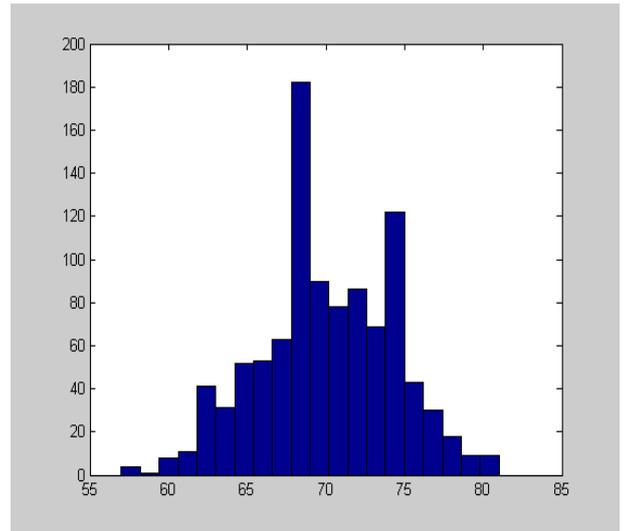


圖 3B Regular Rebalance

圖 3A: 在 Regular Rebalance 策略中股票型基金投資比重 80% 債券型基金投資比重 20%; 圖 3B: 在 Regular Rebalance 策略中股票型基金投資比重 20% 債券型基金投資比重 80%; X 軸表示達到 2/3 所得替代率之可退休年齡, Y 軸是在 1000 次模擬中在各個可退休年齡達到 2/3 所得替代率之個數

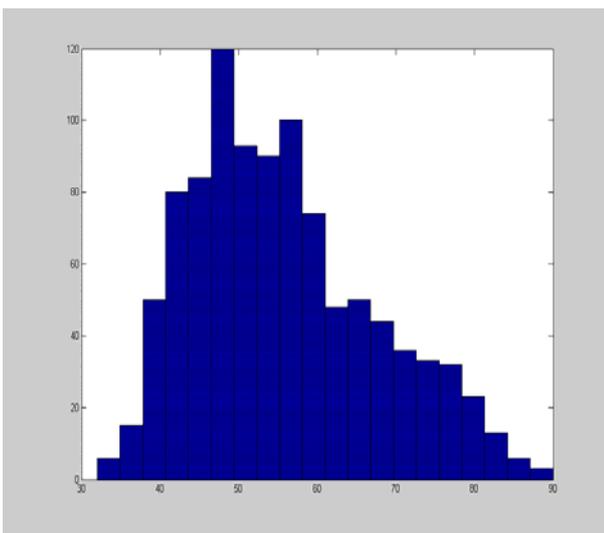


圖 4A Buy & Hold

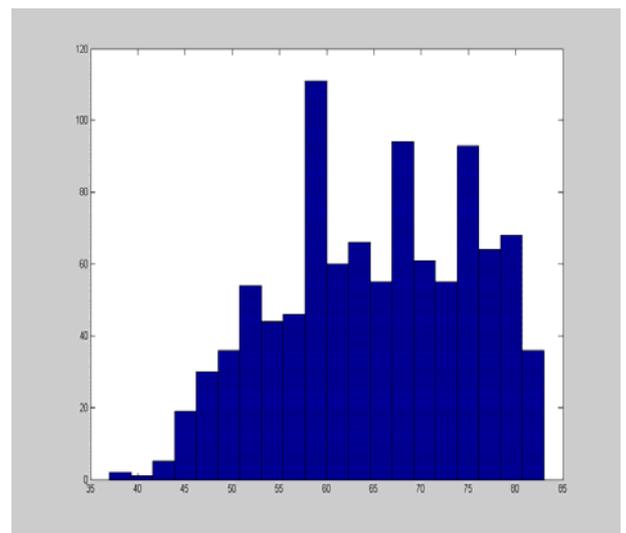


圖 4B Buy & Hold

圖 4A: 在 Buy and Hold 策略中股票型基金投資比重 80% 債券型基金投資比重 20%; 圖 4B: 在 Buy and Hold 策略中股票

型基金投資比重 20% 債券型基金投資比重 80%; X 軸表示達到 2/3 所得替代率之可退休年齡, Y 軸是在 1000 次模擬中在各個可退休年齡達到 2/3 所得替代率之個數

在圖 3 我們比較了在 Regular Rebalance 投資策略中, 股票型、債券型基金資產部位比重分別為 80%, 20% 以及 20%, 80% 的資產配置之達到可退休的年齡分配。圖中橫軸代表退休年齡, 縱軸代表 1000 次模擬中能在此年齡退休的次數。所謂能符合某年紀的退休次數指的是, 一旦資產所累積的價值能供應未來薪資水準三分之二所得替代率時, 就允許給予退休。圖 3A 中, 風險性資產佔主要部位因此屬於較積極性的投資。結果顯示在此資產配置中能擁有較早的退休年紀。但由於屬於積極性的投資策略, 因此造成退休年齡分布有厚尾的現象, 退休年齡有很大的變異程度。圖 3B 屬於保守型的投資策略, 相較於前一個積極策略退休年齡分佈沒有太大的厚尾現象, 變異程度較小, 但平均退休年齡相較之下會晚一些。

圖 4 我們比較在 Buy & Hold 的策略底下, 股票型、債券型基金資產部位比重分別為 80%, 20% 以及 20%, 80% 的資產配置之達到可退休的年齡分配。Buy & Hold 投資策略只對當期提撥金額作資產配置, 已存在於退休帳戶中的資產則不做任何更動。因此 Buy & Hold 策略跟 Regular Rebalance 比較之下, Buy & Hold 變異程度更劇烈。圖 4A 為 Buy & Hold 高風險投資組合退休年齡分部結果。研究發現, 在同樣投資組合比例中, Buy & Hold 能擁有較早的退休機會, 但卻也擁有較大的可能會在非常大的年齡才能退休。圖 4A 與圖 3A 相比較可知, Buy & Hold 呈現更分散的圖形分布, 左右尾端相較之下呈現較厚的分配。圖 4B 也呈現相同之結果。因此我們得知 Buy & Hold 投資策略下退休年齡雖然依投資比重不同跟 Regular Rebalance 具有相同趨勢, 但比較起來變異程度更為劇烈。原因在於 Buy & Hold 對以往資產不作任何部位的改變, 因此當早期風險性資產擁有較重比例時, 會導致很大的變異結果。

上述之單期資產配置很粗略地分為高風險型以及保守型的資產配置。雖然我們只用兩種不同投資比重作為投資決策, 但是否有存在一種適合退休基金投資人的投資決策呢? 由上述可知, 雖然高風險性投資策略下擁有較大的儘早退休可能; 但同樣卻可能面臨很晚的退休可能; 而保守型投資決策很晚退休的可能性雖然降低但也導致儘早退休的可能大幅降低。在資產配置中似乎不存在一個能擁有投資報酬率大(儘早退休可能性大)以及投資風險小(很晚退休可能性低)的投資策略。因此, 我們希望能夠找到「在承受相同風險下能夠獲利最大的投資決策」。而除了單期資產配置之外, 市場上也存在所謂的多期資產配置。與單期靜態資產配置最大不同在於多期資產配置具有較大的彈性能夠有效地增加投資報酬率以及降低投資風險。因此, 接下來之研究會針對多期資產配置探討是否存在一個符合我們所希望的投資決策, 與靜態資產配置相同投資風險下能擁有較高投資報酬率的, 動態投資決策。

參、多期資產配置模型建構

單期與多期資產配置最大差異在於多期的投資比重在整個投資比重並非一成不變，而隨著時間會改變投資比重。本章節多期資產配置策略與前一章節單期資產配置相同分為 Regular Rebalance 與 Buy & Hold 兩種，但投資比重會在固定時間點內做比例的改變。Regular Rebalance 策略中，我們在固定時點作整個資產投資組合比例的變更；Buy & Hold 則是同樣在固定時點作提撥金額投資組合比例的變更。本研究使用的動態投資組合模型建構如下：

一、目標給付模型

$$L_T = R s_T \ddot{a}_T \quad (2)$$

T 為退休時點； \ddot{a}_T 為 T 時點以 1 元折現後的年金現值； R 為目標所得替代率； s_T 為退休時點薪資水準。本文假設員工退休時購買躉繳年金保險作為退休後規劃。年金折現以 2.5% 為預定利率以及使用年金生命表(1997TIA)作為本文研究的假設。

二、Regular Rebalance 資產累積模型

$$F_t = (F_{t-1} + c_t s_t) \left[\sum_{j=1}^3 P_{ij} \times (1 + r_j(t)) \right], \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (3)$$

$$P_{ij} \geq 0$$

$$P_{i1} + P_{i2} = 1$$

F_t 為 t 時點退休金帳戶價值，在此定義 $F_0 = 0$ 。 c_t 與 s_t 分別為當期提撥率與薪資； P_{ij} 代表第 j 項資產在第 t 年度初應持有比例； $r_j(t)$ 代表資產 j 在第 t 年內之總名目報酬率。各投資標的不允許做放空的動作，以及投資比重總和要等於 1。

三、Buy & Hold 資產累積模型

$$FS_t = (FS_{t-1} + c_t s_t P_{t1}) \times (1 + r_1(t))$$

$$FR_t = (FR_{t-1} + c_t s_t P_{t2}) \times (1 + r_2(t))$$

$$FB_t = (FB_{t-1} + c_t s_t P_{t3}) \times (1 + r_3(t))$$

$$F_t = FS_t + FR_t + FB_t \quad (4)$$

$$t = 1, 2, \dots, T.$$

$$P_{ij} \geq 0$$

$$P_{i1} + P_{i2} = 1$$

FS_t 、 FR_t 與 FB_t 分別為退休金帳戶中股票型、平衡型、債券型基金在各時點價值； r_1 、 r_2 、 r_3 分別為股票型、平衡型、債券型基金名目報酬率。此時 Buy & Hold 策略底下 P_{ij} 只對新進提撥金額作資產配置，這是與 Regular Rebalance 不同之處。

定義 $FS_0=FR_0=FB_0=F_0=0$ 。本研究動態投資策略中，Regular Rebalance 或 Buy & Hold 皆每年做資產配置但每 5 年做投資組合比重的改變。

本研究使用每 5 年做投資比重之改變而非使用其他年限做調整。原因在於若每年做比例調整時，會使得決策變數之數量倍增而導致技術面如演算法執行上有所困難；另一原因是由於資產配置比例改變的時間長短為 5 年與 1 年時其影響效果有限。例如在對 40 年期作資產配置時，40 年每年資產配置皆相同與每 20 年作資產配置比例變更其效果將會非常顯著。若每 5 年作比例變更，在投資標的只有兩種情況底下所產生之決策變數為 16 個；若每年做比例變更則產生 80 個決策變數，這對於演算法執行上以及效果上皆產生莫大的負荷。

肆、基因演算法

接下來目的就是要求最適的投資組合使得(5)式目標函數能夠極大化。一般在求解方程式最佳化時，由於方程式非線性組成或內含複雜函數以及限制式因此無法使用微積分等方式推導封閉解，如此勢必要借助數值解的幫助。常見的數值解方式以演算法的方式最為常見。演算法的步驟不外乎給予起始值，迭代演算得到一組比原來值更好的數值，之後再進一步演算得到新的目標函數值，直到夠接近目標函數的全域最佳解（global optimal）。不同的演算法最大差異在於其迭代演算的方式不同，如共軛梯度演算法迭代方式是朝著梯度的方向演算；退火模擬演算法是給一特定方程式以此方程式作為媒介迭代。而演算法常遇到的問題在於所得到的解並非全域最佳解而只是部份最佳解(local solution)。此問題在本研究中所使用的基因演算法在設計上以突變的概念能盡量避免掉入部份最佳解的情況。以下介紹本文章使用的基因演算法。

一、基因演算法之簡介

達爾文於 1859 年提出了「物競天擇，適者生存」演化理論，即自然界之生物經由競爭，使得適應環境者得以繁衍後代，不適應者便遭淘汰，經過天擇後的生存者經過不斷地演進，便可產生更優良、更能適應環境之後代，而 Holland 基於此概念，於 1975 年研究出基因演算法。基因演算法是運用電腦模擬適者生存，不適者淘汰的演化原則，經由複製、交配及突變運算，搜尋出欲求之最佳解。

二、基因演算法之演算程序

在執行基因演算法之前，必須先設定初始參數值，例如：族群大小、染色體長度、交配率及突變率等，而這些參數將會影響基因演算法之效能，茲將各參數分述如下：

(一) 族群大小

族群大小即表示每個世代之個體數量，當族群越大，搜尋的範圍越廣，陷入

區域最佳化的機率越小，但搜尋時間卻會增加，反之，當族群過小，搜尋的範圍不夠廣泛，容易陷入區域最佳化，導致演化過程提早收斂，所以族群大小會影響基因演算法的搜尋效率，因此在決定其大小時，需兼顧效率與整體表現，使演算法發揮最大之效用，在基因演算法中，族群大小通常為固定的，一般常用的族群大小為30-200。

(二) 染色體長度

染色體的長度與最佳解之精密性有關，當染色體長度越長，精確性越高，但編碼、解碼的運算時間卻相對地提高，而長度太短，精確性太低，會導致無法收斂，所以應選擇適當的染色體長度。

(三) 交配率

交配率是指母體中染色體需要進行交配之比率，一般的操作方式有兩種：一為母體中的染色體總數 (N) 有CR 的機率進行交配，即CR*N；另一為預先配對的染色體，進行交配的機率為CR。當交配率過高，會使族群中較優的個體被選取的速度大於演化產生新個體的速度，因而失去交配的意義，但交配率過低，會使搜尋過程停滯不前，一般常用的交配率為0.5-1.0。

(四) 突變率

突變率是指個別基因發生突變的數量與母體基因數量之比率，一般的操作方式有兩種：一為染色體中的基因發生突變之機率，且任何位置之基因發生突變與否均為獨立；另一為母體中發生突變的染色體比率。而突變的目的是為了避免基因在經由複製與交配運算後依舊沒有改變，導致族群間的相似度太高，如突變率過高，會失去子代與母代之相似性，但突變率過低，會容易收斂於區域最佳解，一般常用的突變率為 0.001-0.05。

本文撰寫基因演算法程式碼是使用 Matlab 6.5 軟體。Matlab 雖然有內建演算法，但在使用上有其缺點。本研究在求取最佳化方程式時，如以下方程式設定：

$$\text{Maximize}_{\bar{x}} F = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{if } \bar{x} \in C_1 \\ g(\bar{x}) & \text{if } \bar{x} \in C_2 \end{cases}$$

C_1 、 C_2 為決策變數 \bar{x} 不同之定義域。因此隨定義域之設定方式，F 有可為不連續函數。Matlab 內建演算法有一很大特點，「起始值」之給予。之所以要給予起始值目的在於讓演算法有個開頭，起始點能做迭代過程的開端。因此起始值的選取對於內建演算法尤其重要。一旦選擇不適當時，演算法之迭代過程便很可能在某特定定義域中迴盪而無法達到真正的最佳解。而基因演算法雖然也有起始值，但其在使用上較有彈性。隨著使用者之設定，基因演算法可以為數十個甚至數百個起始值來做迭代過程；而 Matlab 內建演算法只能擁有一個起始值來做迭代開端，這便是基因演算法跟內建演算法最大不同點。因此對於不連續函數之最佳化，基因演算法能夠有效地解決我們最佳化之問題。本文研究在一開始也有使用 Matlab 內建之演算法作為最佳化之工具，但顯然所得到的最佳化解很明顯並非為一個全域最佳解。因此本文使用基因演算法作為研究之工具。

伍、最佳化多期與單期資產配置

第二節所陳述的單期投資組合其投資比重雖然是依照不同風險偏好程度而大略區分為二種不同投資策略，但我們不能明確得知在所承受的風險相同情況底下是否有其他投資策略能帶來更大的報酬。投資者最大的困擾在於如何選取最適合自己的投資策略、投資組合比重，甚至在做動態投資決策時每期如何做調整等這類問題。例如在單期靜態投資策略 Regular Rebalance 下股票、債券投資比重分別為 80%、20% 策略下，可得知此為高風險高報酬投資策略，但不能確定投資人在擁有相同的風險承受度時，是否有更好帶來更高報酬的投資策略。投資人除了關心報酬率大小外，也同樣需要了解所承受的風險高低。因此，在任意給定的靜態投資組合中，我們雖然可以預期其風險之高低與報酬大小，但沒有明確的根據讓投資者了解這是一個最合適的投資策略。

因此，本章節引進「最佳化」的概念作為接下來探討的主軸。投資者不外乎希望投資報酬率極大以及風險越小。以量化的形式來表示即：

$$\begin{aligned} & \text{Maximize (平均報酬率)} \\ & \text{subject to 風險} \leq \lambda \end{aligned} \quad (5)$$

λ 為不同投資人希望承擔的最大風險，可用資產變異程度或者尾端風險衡量指標 (如 VaR、CTE) 來表示。隨著所承受的風險越大相對的投資者希望所能獲得的報酬率越高。VaR 的概念是應用統計學上機率分配的概念，在給定一個信心水準下未來損失發生的最大情況。假設一投資組合在未來退休時點損失隨機變數 X_T ，在此所謂的損失指的是在 T 時退休實際退休金帳戶價值不足以達到目標退休金額之差距稱之為損失，即 $X_T = (L_T - F_T | L_T > F_T)$ ， F_T 代表到達預期退休年齡 T 時實際退休金帳戶價值之隨機變數； L_T 為到達預期退休年齡 T 所需之退休金金額，本文以三分之二所得替代率以 2.5% 預定利率構成的年金現值為之。VaR_T95 代表損失分配隨機變數 X_T 有 95% 機率會小於此數值。即

$$\text{Prob}[X_T < \text{VaR}_T 95] = 0.95$$

CTE 是種類似 VaR 但符從同調性的左端風險衡量方法。CTE_T75 是指給定 75% 信心水準下，所有損失超過 VaR_T75 的期望值。即

$$\text{CTE}_T 75 = E[X_T | X_T > \text{VaR}_T 75]$$

對於 DC 制度參予者而言，希望能夠越早退休的機率越大以及很晚才能退休的機率越小。相對這意味著所賦予的投資策略能帶來較大的報酬率另外也不希望有太大的尾端風險。因此我們給予如(5)式的設計：

目標函數

$$\begin{aligned}
& \underset{P_{ij}}{\text{Maximize}} F = E(\text{Return}) \\
& \text{subject to } CTE_T 75 \leq \lambda \\
& \quad \lambda = g(T)L_T \\
& \quad P_{t1} + P_{t2} = 1 \\
& \quad P_{ij} \geq 0 \\
& \quad T = 50.51 \dots 70
\end{aligned} \tag{6}$$

如同(5)式的設定，投資人欲在 T 時歲退休且希望由各資產投資部位(P_{ij})所構成的投資組合在面臨投資績效不佳時能夠有個風險控管機制使得退休年齡不至於過晚。對一般投資大眾而言退休年齡落在 75-80 歲間已是非常不能忍受的範圍。從尾端風險的角度來看，限制其承受的尾端風險($CTE_T 75$)不大於 $g(T)L_T$ 之下，能夠極大化預期報酬率；即投資人希望在預期退休年齡所面臨退休金不足金額在 75%信心水準下不超過 $g(T)L_T$ 。在此 L_T 為投資人在預期退休年齡 T 下所需之退休金， $g(T)$ 為退休年齡相關之方程式； $g(T)$ 本文之設定為線性方程式：

$$g(T) = 0.9 - 0.015(T - 50), \quad T = 50.51 \dots 70 \tag{7}$$

$g(T)$ 為隨預期退休年齡遞減之方程式。預期退休年齡越早，能容忍較大的投資風險因此給予較大的尾端風險限制；相反退休年齡越晚則較不能容忍風險而給予較小的尾端風險限制。而本研究 $g(T)$ 之設定能使得「損失大於 $VaR_T 75$ 平均延後退休年齡」落在 75-80 之間。

上述式子直觀上而言是希望能夠有效控制尾端風險，避免投資結果之尾端風險過於嚴重。從另一個角度來想，有效控制尾端風險大小其功效就等同於能夠減少過晚退休退休的可能性。 $g(T)$ 為遞減函數之設定意同於希望能越早退休之投資者必須面對較晚退休可能性增加，本文以線性遞減函數作為風險控管之依據。如表 4 結果顯示，在 $g(T)$ 限制下各預期退休年齡其損失大於 $VaR_T 75$ 平均延後退休年齡介於 75-80 之間，可得知欲越早退休其相對愈承受延後退休風險越大。因此，接下來探討員工在設定退休年齡為 50-70 歲之間，其資產配置導致的報酬率以及風險大小。

一、Regular Rebalance 單期靜態投資策略

在靜態投資策略底下我們採用 Regular Rebalance 投資策略。在此所指的「單期靜態投資策略」意味著每期投資組合的比重皆不變的情況底下稱之為靜態投資策略。表 1 比較了在不同退休年齡下，其投資組合的差異、報酬率、面臨的臨界風險以及在損失(X_T)大於 $VaR_T 75$ 下平均延後退休年齡。所謂「損失大於 $VaR_T 75$ 平均延後退休年齡」意指在預期退休年齡 T 下最大可能損失之資產平均價值

$\hat{F}_T = E[F_T | X_T > VaR_T 75]$ ，必須延後退休年齡 τ 使得資產價值能滿足退休金需求，

即 $\hat{F}_{T+\tau} = L_{T+\tau}$ 。舉個例子來說，投資者設定在 50 歲退休。在目標函數(2)設定下其最適資產配置比例為股票 91.408%、債券 8.5917%。年平均報酬率 14.777%， $CTE_{50} 75$ 到達臨界 $0.9L_{50}$ 。因此預期在 50 歲退休的投資人會以高風險高報酬的投資策略進行資產配置。在 50 歲所累積的平均最大損失資產為 $\hat{F}_{50} = E[F_{50} | X_{50} > VaR_{50} 75]$ ，則必須延後至 77 歲退休才能使資產累積足夠應付退休需求，即 $\hat{F}_{50+22} = L_{50+22}$ 。

表 1 Regular Rebalance 最佳化單期靜態投資組合與其投資績效

退休年齡 T	股票	債券	Return(%)	$g(T) = CTE_T 75 / L_T$	損失大於 $VaR_T 75$ 平均延後退休年齡
50	0.91408	0.085917	14.777	0.9	77
51	0.87517	0.12483	14.355	0.885	76
52	0.82046	0.17954	13.72	0.87	76
53	0.78913	0.21087	13.348	0.855	76
54	0.77015	0.22985	13.124	0.84	76
55	0.72496	0.27504	12.634	0.825	75
56	0.69447	0.30553	12.278	0.80988	75
57	0.67613	0.32387	12.086	0.795	76
58	0.67297	0.32703	12.047	0.78054	76
59	0.65827	0.34173	11.91	0.76512	76
60	0.64561	0.35439	11.77	0.75	76
61	0.6093	0.3907	11.351	0.735	76
62	0.59371	0.40629	11.177	0.72	76
63	0.57929	0.42071	11.01	0.705	77
64	0.57498	0.42502	10.947	0.68953	78
65	0.56559	0.43441	10.809	0.67488	78
66	0.55138	0.44862	10.652	0.66	78
67	0.52618	0.47382	10.345	0.64331	79
68	0.54233	0.45767	10.542	0.62887	79
69	0.54827	0.45173	10.615	0.615	80
70	0.52199	0.47801	10.306	0.6	80

表 1 結果可得知，投資人寄望越早的退休年齡勢必用越高風險的投資策略以達到目的，能帶來較高的報酬率使得退休可能性增加但也給予較大的風險使得尾端風險資產必須要延後退休。表 4 呈現預期退休年齡從 50 歲至 70 歲之資產配置。結果發現，越晚退休年齡之資產配置呈現越保守狀況相對地越早退休年齡則

呈現越積極的資產配置。由於退休年齡越晚投資期間相對越長因此可用較保守的投資策略來達到目的；而退休年齡越早則必須很積極的投資策略才能達到預期目標價值。

二、Regular Rebalance 多期投資策略

本章節使用多期投資策略跟單期靜態投資策略作一比較。在此所謂「多期投資策略」指的是投資比重每5年作改變，即：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{21} \\ P_{22} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} P_{51} \\ P_{52} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P_{61} \\ P_{62} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{71} \\ P_{72} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} P_{10\ 1} \\ P_{10\ 2} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

在此依然延續目標函數(5)之設定，求取不同退休年齡下最適化投資決策。

由表 2 可發現，在最佳化多期投資組合中，投資策略呈現生命週期基金的投資方式。這是為了提升報酬率以及降低到期風險所構成的最適投資策略。而退休年齡越晚所呈現「Top-Down」的趨勢越明顯，是因為退休年齡越晚而拉長了投資期間使得報酬率不必要太高就能達到目標給付，這與靜態投資組合有類似的效果。

表 2 Regular Rebalance 最佳化動態投資組合之股票比例

退休年齡	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65	66-70
50	1	1	1	1	0.92233	0.85424	NaN	NaN	NaN	NaN
51	1	1	1	0.98347	0.84689	0.85763	0.76136	NaN	NaN	NaN
52	1	1	0.98964	0.98773	0.8125	0.76048	0.6634	NaN	NaN	NaN
53	1	1	1	1	0.77027	0.76712	0.56627	NaN	NaN	NaN
54	1	1	1	0.94779	0.74332	0.75455	0.625	NaN	NaN	NaN
55	1	1	1	0.91163	0.67657	0.71373	0.61069	NaN	NaN	NaN
56	1	1	1	0.99574	0.9435	0.8914	0.73158	0.74112	NaN	NaN
57	1	1	1	0.99206	0.79856	0.87129	0.73733	0.66369	NaN	NaN
58	1	1	1	1	0.75	0.76129	0.65505	0.62874	NaN	NaN
59	1	1	0.98238	0.95628	0.69863	0.6787	0.59633	0.59603	NaN	NaN
60	1	1	0.9845	0.90323	0.63934	0.65217	0.57143	0.50222	NaN	NaN
61	1	1	1	0.94975	0.56204	0.70189	0.54667	0.46859	0.50456	NaN
62	1	1	1	0.9375	0.51471	0.68954	0.52734	0.50239	0.48596	NaN
63	1	1	0.99583	0.92683	0.58562	0.5988	0.56828	0.50296	0.42712	NaN

64	1	1	1	0.89085	0.5817	0.76797	0.47475	0.46988	0.50207	NaN
65	1	0.99505	1	0.91379	0.69767	0.59195	0.50119	0.51136	0.30159	NaN
66	1	1	0.99535	0.91367	0.56264	0.68358	0.43562	0.43096	0.48429	0.35676
67	1	1	1	0.92188	0.48643	0.78229	0.58084	0.41126	0.38889	0.41489
68	1	1	1	0.91667	0.51351	0.84733	0.46309	0.51991	0.32	0.44072
69	1	1	1	0.79937	0.91139	0.77358	0.57311	0.34857	0.35955	0.4625
70	1	1	1	0.82653	0.64141	0.75294	0.5285	0.56561	0.45455	0.46237

表 3 最佳化動態投資組合投資績效表

退休年齡	Return(%)	$CTE_T 75/L_T$
50	15.357	0.9
51	15.138	0.88498
52	14.759	0.87
53	14.538	0.85498
54	14.345	0.83999
55	14.03	0.82499
56	14.917	0.81
57	14.556	0.7949
58	14.161	0.78
59	13.736	0.76498
60	13.347	0.74995
61	13.235	0.73497
62	13.081	0.71999
63	12.978	0.70492
64	12.953	0.68992
65	12.659	0.67492
66	12.544	0.65999
67	12.561	0.64487
68	12.521	0.62965
69	12.695	0.61495
70	12.656	0.59987

我們單針對預定 65 歲退休之投資人作一探討。在不引用最佳化概念時，投資人隨意選取單期靜態投資組合，股票比例從 100%-0%。若給予 $g(T)$ 之風險控管機制，可得知在單期靜態投資組合中股票介於 50%-60% 是對投資者對理想的投資組合。但從動態投資組合角度來看，多期投資組合是有可能達到高報酬，低風險的效果。以表 3 結果之 65 歲多期投資組合與任意單期靜態投資組合來做一

比較，結果如表 4。可得知除非靜態投資組合所承受風險比最佳化動態投資組合來的大才有可能使得單期靜態投資組合報酬率來的較佳，否則最佳化多期投資組合是能達到報酬率較高以及風險較低的效果。

表 4 退休年齡 65 下單期靜態投資組合與最佳化多期投資組合比較

投資組合	靜態投資組合報酬率與最佳化動態投資組合報酬率兩者之差	靜態投資組合風險($CTE_T 75/L_T$)與最佳化動態投資組合風險兩者之差
股票:100%	+	+
股票:90%	+	+
股票:80%	+	+
股票:70%	-	+
股票:60%	-	+
股票:50%	-	+
股票:40%	-	-
股票:30%	-	-
股票:20%	-	-
股票:10%	-	-
股票:0%	-	-

因此最佳化多期投資組合不論在報酬率以及風險承受度上皆能優於股票比例落在 50%-70%之單期靜態投資組合。例如股票債券比例為：(70%、30%)，(60%、40%)。由數值模擬結果可知其平均報酬率分別為 12.403%，11.217%， $CTE_T 75/L_T$ 分別為 0.73418，0.69215；而多期投資組合在 65 歲可達到 12.659% 報酬率， $CTE_T 75/L_T = 0.67492$ 。意味著除非單期靜態投資策略要承受更大的風險才有可能使得報酬率比多期投資策略來的高，否則多期投資策略較單期靜態投資策略能帶來更大的報酬率以及較小的到期風險。

因此，研究結果得知最佳化之 Regular Rebalance 多期投資策略能較單期靜態方式帶來更高的報酬以及較低的風險。這是因為多期投資策略較單期靜態更有彈性地控制每期資產投資比重，使得投資人在預期退休年齡能擁有較高的報酬率以及較低的到期風險。注意的是本研究上述結果之產生很大原因在於 $g(T)$ 之設定。本研究 $g(T)$ 設定之結果導致最佳化多期投資組合能優於單期靜態投資組合其股票比例為 50%-70% 之情況。 $g(T)$ 可視為投資人之風險偏好程度，若改變 $g(T)$ 之設定則會產生不同之最佳化多期投資組合優於單期靜態投資組合之投資範圍。但可以確定的是，不論 $g(T)$ 之設定如何，多期投資組合必然會存在某投資範圍其投資績效皆優於單期靜態投資組合。

三、Buy & Hold 與 Regular Rebalance 比較

本文也比較了 Buy & Hold 投資策略下多期投資組合其投資組合的差異。研究結果顯示 Buy & Hold 同樣在多期投資組合底下也擁有較佳的風險控管機制。意味著不論哪種投資策略，多期投資組合相較於單期靜態而言所面臨的風險較能獲得控制。但同樣是在多期調整策略下，Regular Rebalance 與 Buy & Hold 資產配置的方式卻是不相同的。舉個例子來說，20 歲員工設定 65 歲欲退休，希望能在提撥率 6% 情況下達到三分之二所得替代率。分別使用 Regular Rebalance 與 Buy & Hold 來做資產累積的策略；也同樣使用(6)式作為最佳化的目標函數，其資產配置結果如下。

表 5 Regular Rebalance 在(6)式目標函數，65 歲退休年齡之最適資產配置

時間	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65
股票	1	0.99505	1	0.91379	0.69767	0.59195	0.50119	0.51136	0.30159
債券	0	0.00495	0	0.08621	0.30233	0.40805	0.49881	0.48864	0.69841

表 6 Buy & Hold 在(6)式目標函數，65 歲退休年齡之最適資產配置

時間	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65
股票	0	0	0	0	0.5188	1	0.9536	0.5219	0.7852
債券	1	1	1	1	0.4812	0	0.0464	0.4781	0.2148

表 5 與表 6 呈現在同樣提撥率同樣目標函數底下，不同投資策略對於資產配置的影響。由表 5 我們得知，Regular Rebalance 越接近退休時點風險性資產部位會降低，取而代之的是保守型資產。呈現所謂「Top-Down」的投資方式。這是因為在期初時我們要擁有較高的報酬以支付未來的目標退休金額，越接近到期日保守型資產部位增加這是為了減少到期給付的風險。結果與實務上生命週期型態(lifestyle)投資方式呈現相同的現象。

至於 Buy & Hold 策略底下呈現相反的投資組合結果。期初皆是保守型資產佔大部分比重，而接近到期日風險型資產部位比重反而提升，呈現所謂

「Down-Top」的投資方式。此乃因為 Buy & Hold 只對提撥金額對資產配置。若在期初皆把提撥金額放入高風險資產中，由於配置後的資產不再作任何變更則導致在到期日時退休金會有很大的變異情況產生。為了避免此情況產生，在期初保守型資產佔大部分比重是為了降低退休金到期給付風險；而隨著接近到期日再對新進提撥金額給予較高風險的投資以便達到較高的獲利。

陸、結論

現行退休金制度已由確定給付制轉換為確定提撥制。投資風險從雇主的身上

移往至員工身上，員工的退休金額也變成由投資報酬率來決定其退休所得的多寡。本文以預定的所得替代率作為目標給付，並藉由模擬最佳化的方式探討在各個不同之預期退休年齡下所需的最適資產配置。從均勻抽樣法與隨機抽樣法的比較，我們可以看出與未抽樣相同的生命週期型態(lifestyle)投資方式。而隨機抽樣法的結果雖然仍可看出 4000 組情境的趨勢，但是其準確性相對於均勻抽樣法仍稍嫌不足，並不適合用來代替原先的 4000 組情境。指標抽樣法的結果並沒有得到較好的結果，除了能看出指數連結型債券仍佔有很大的投資比例外，可說是幾乎看不出任何的趨勢。這樣的結果可能是因為我們使用指標抽樣法所找的是屬於所有情境中比較極端的部分，所以可能情境間的差距過大，以致於無法尋找抽樣的情境間較適合的資產配置。本文採用基因演算法尋求資產配置之最佳解，改善以往演算法最佳化過程中掉入非最佳解的窘境。在本文中，我們發現透過多期調整資產配置之投資方式，的確可以比單期之靜態投資策略有效的提高報酬率、降低投資風險或是同時提高報酬率且降低投資風險，各個不同風險偏好的投資者都可透過最佳化的求解過程，找到其最適的投資策略，風險偏好的程度可透過本文中 $g(T)$ 之設定及期望退休年齡的決定。因此本文中 $g(T)$ 可視為專為某投資人所設計之風險控管機制， $g(T)$ 也可有其他設計方式，不論 $g(T)$ 如何設計，在最佳化情況底下必然可找到一組多期最佳投資組合優於單期靜態投資組合。另外，期望越早退休的投資者將採取較積極的投資策略，允許較高的風險，因此會有較高的期望獲利能力；期望較晚退休的投資者則不須採取太高風險投資策略，會有較平穩的期望獲利能力，因此較不會有太高年齡還沒累積到足夠退休基金的情形。另外，文中亦發現最適之多期定期重新調整投資比重(regular rebalancing)的投資方式，呈現如同生命週期之“Top-Down”的投資策略，而與過去文獻較為不同的發現是，最適之多期買入並持有(buy and hold)的投資方式，顯示投資者應採取與生命週期反向之“Down-Top”的投資策略。

參考文獻

1. Andrea Consiglio, and Flavio Cocco, and Stavros A. Zenios, (2005), "Scenario optimization asset and liability modeling for individual investors." *working paper* 02-10.
2. B. De Finetti and Via S. Faustino, (2004), "Optimal pension management in a stochastic framework." *Insurance :Mathematics and Economics* ,Vol. 34, p79-95.
3. Brison, G.P., and Singer, B.D., and Beebower,G.L., (1991), "Determinants of Portfolio Performance II : An Update." *Financial Analyst Journal*, Vol. 47,Iss. 3, p40-48.
4. David Blake, and Andrew J. G. Carins, and Kevin Dowd, (2001), "Pensionmetrics : stochastic pension plan design and value-at-risk during the accumulation phase." *Insurance : Mathematics and Economics* , Vol29 , p187-215 .

5. G. Lindfield & J. Penny, 1999, *Numerical methods using matlab 2/E*. Pearson Education Taiwan Ltd.
6. Gerald W. Buetow Jr., and Ronald Sellers, and Donald Trotter, and Elaine Hunt, and Willie A. Whipple Jr., (2002), "The Benefits of Rebalancing." *Journal of Portfolio Management*, Vol.28, Iss. 2, p23-32.
7. Haberman, S. and Vigna, E. , (2002), "Optimal investment strategies and risk measures in defined contribution pension schemes." *Insurance :Mathematics and Economics* , Vol31 , p35-69 .
8. J. F. Boulier, and S. Huang, and G. Taillard, (2001), "Optimal management under stochastic interest rates : The case of a protected defined contribution pension fund." *Insurance : Mathematics and Economics* , Vol28 , p173-189.
9. Mary Hardy, (2003), *Investment Guarantees Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance*. Wiley Finance.
10. Vigna, E., and Haberman, S., (2001), "Optimal Investment Strategy for defined contribution pension schemes." *Insurance mathematics and Economics*, 28, p233-262.
11. Yvonne, C., (2002), "Efficient Stochastic Modeling For Large and Consolidated Insurance Business : Interest Rate Sampling Algorithms." *North American Actuarial Journal*, Vol.6 Iss. 3, p88-103.
12. Yvonne, C., (2003), " Efficient Stochastic Modeling : From Scenario Sampling To Parametric Model Fitting Utilizing ASEM as an Examplng." *International Professional Development Symposium Co-sponsored by Canadian Institute of Actuaries, Actuarial Foundation, and Society of Actuaries*, Toronto, Canada.
13. Yen, Simon H, and Lee, Mei-Hsing, (2006), "Dynamic Asset Allocation with Downside Risk and Extreme Returns." *working paper*.